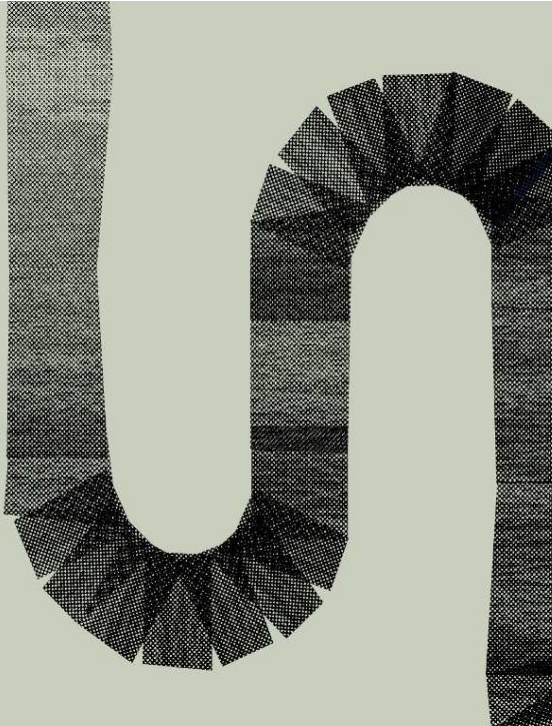




Problemas de frontera 'no-tan-libre'

Rafael Granero-Belinchón
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

7 Noviembre 2012



Contents (I):

El modelo:

- ▶ Escenario físico y derivación del modelo: Muskat inhomogéneo.*

Primeras ideas y resultados:

- ▶ Existencia y unicidad
- ▶ Pero, ¿tan importante es la inhomogeneidad? Vamos a ver unas simulaciones
- ▶ Efecto regularizante
- ▶ Ill-posedness en el caso R-T inestable

Contents (II):

Singularidades en tiempo finito:

- ▶ Existencia de dichas singularidades *
- ▶ Comparación entre los diversos modelos *

Teoría cualitativa:

- ▶ Principio del máximo para $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$
- ▶ Estimación para el decaimiento de $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$
- ▶ Principio del máximo para $\|\partial_x f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ *
- ▶ Principio del máximo para $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ *

-Nota: * significa que nos detendremos con más detalle.

El problema de Muskat

Queremos estudiar la evolución de una ola entre dos fluidos de distintas densidades en un medio poroso



Figure: Agua y aire en un medio poroso.

Hipótesis:

- ▶ El fluido abajo tiene densidad constante e igual a ρ^2 . La densidad del fluido de arriba es ρ^1 . Ambos fluidos son **incompresibles, invíscidos e irrotacionales**.
- ▶ La única fuerza externa presente es la **gravedad**.

Problemas de frontera “no-tan-libre”

Rafael Granero-Belinchón

- ▶ La interfase, $z(\alpha)$ (la ola), inicialmente puede parametrizarse como un grafo (y entonces escribiremos f) y **no** consideramos tensión superficial.
- ▶ Debido a la **fricción de las partículas del fluido con el medio sólido** tenemos un rozamiento proporcional a la velocidad: $-\frac{v}{\kappa}$. κ es la permeabilidad del medio.
- ▶ Las velocidades del fluido son **pequeñas y no cambian mucho**. Por lo tanto podemos despreciar la aceleración.

Esto es lo que se conoce como *el problema de Muskat*.

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Así tenemos

Las ecuaciones

$$\frac{v}{\kappa(x)} = -\nabla p - (0, \rho(x)),$$

Conservación del momento

$$\nabla \cdot v = 0,$$

Incompresibilidad (1)

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0,$$

Conservación de la masa.

Esta fórmula se conoce como **Ley de Darcy** y debe su nombre a un ingeniero francés, Henry Philibert Gaspard Darcy (Junio 10, 1803 – Enero 3, 1858), que la obtuvo experimentalmente.



Figure: Henry Darcy.

Matemáticamente puede obtenerse de las ecuaciones de Stokes usando homogenización (ver trabajos de Tartar y Allaire).

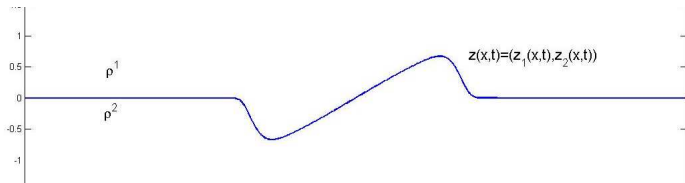
Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Ahora tenemos que cerrar el sistema dando como dato $\kappa(x)$:

Caso homogéneo con profundidad infinita

$$\kappa(x) = 1$$

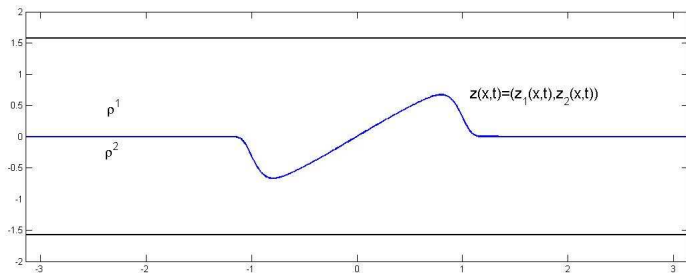


Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Caso homogéneo con profundidad finita

$$\kappa(x) = \mathbf{1}_{\{-\pi/2 < y < \pi/2\}}$$



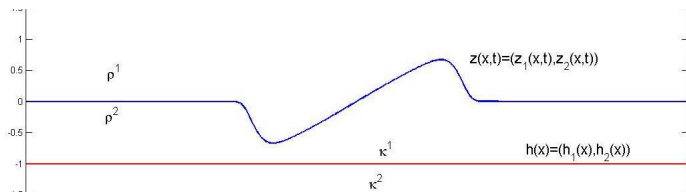
Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

También podemos preguntarnos por lo que pasa cuando la permeabilidad toma dos valores **positivos**:

Caso inhomogéneo con profundidad infinita

$$\kappa(x) = \kappa^1 \mathbf{1}_{\{-h_2 < y\}} + \kappa^2 \mathbf{1}_{\{y < -h_2\}}$$



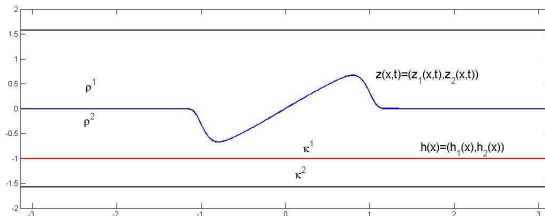
Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

O por el caso completo, *i.e.* la permeabilidad toma valores arbitrarios en una región y se anule fuera.

Caso inhomogéneo con profundidad finita.

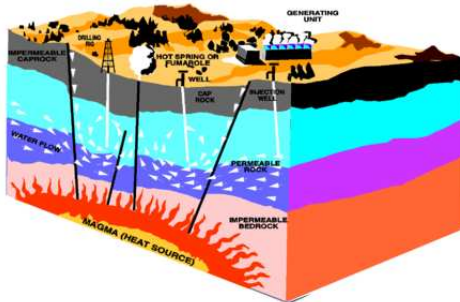
$$\kappa(x) = \kappa^1 \mathbf{1}_{\{-h_2 < y < \pi/2\}} + \kappa^2 \mathbf{1}_{\{-\pi/2 < y < -h_2\}}$$



Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Y, por si la simple curiosidad no sirve como excusa, ¡hasta podemos dar aplicaciones! Por ejemplo en la obtención de energía geotérmica



Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Cada uno de los cuatro casos anteriores tiene unas ecuaciones diferentes (si bien todas son similares en algunos aspectos). En lo que sigue escribiré

$$\mathcal{K} = \frac{\kappa^1 - \kappa^2}{\kappa^1 + \kappa^2}, \kappa^1 = 1 \text{ y } \rho^2 - \rho^1 = 2\pi$$

Caso 1: La ecuación para el medio homogéneo y no acotado; $l = \infty$

$$\partial_t f = \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\partial_x f(x) - \partial_x f(x - \eta))\eta}{\eta^2 + (f(x) - f(x - \eta))^2} d\eta.$$



Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Caso 2: La ecuación para el medio homogéneo y acotado; $l = \pi/2$

$$\partial_t f(x) = \frac{1}{2} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\partial_x f(x) - \partial_x f(x - \eta)) \sinh(\eta)}{\cosh(\eta) - \cos(f(x) - f(x - \eta))} + \frac{(\partial_x f(x) + \partial_x f(x - \eta)) \sinh(\eta)}{\cosh(\eta) + \cos(f(x) + f(x - \eta))} d\eta.$$



Caso 3: La ecuación para el medio inhomogéneo y no acotado

$$\partial_t f(x) = \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta(\partial_x f(x) - \partial_x f(x - \beta))}{\beta^2 + (f(x) - f(x - \beta))^2} d\beta \\ + \frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varpi_2(x - \beta)(\beta + \partial_x f(x)(f(x) + h_2))}{\beta^2 + (f(x) + h_2)^2} d\beta,$$

$$\varpi_2(x) = 2K \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial_x f(\beta)(h_2 + f(\beta))}{(x - \beta)^2 + (-h_2 - f(\beta))^2} d\beta$$



Caso 4: La ecuación para el medio inhomogéneo y acotado

$$\begin{aligned}\partial_t f(x) = & \frac{1}{2} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\partial_x f(x) - \partial_x f(\beta)) \sinh(x - \beta)}{\cosh(x - \beta) - \cos(f(x) - f(\beta))} d\beta \\ & + \frac{1}{2} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\partial_x f(x) + \partial_x f(\beta)) \sinh(x - \beta)}{\cosh(x - \beta) + \cos(f(x) + f(\beta))} d\beta \\ & + \frac{1}{4\pi} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varpi_2(\beta)(\sinh(x - \beta) + \partial_x f(x) \sin(f(x) + h_2))}{\cosh(x - \beta) - \cos(f(x) + h_2)} d\beta \\ & + \frac{1}{4\pi} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varpi_2(\beta)(-\sinh(x - \beta) + \partial_x f(x) \sin(f(x) - h_2))}{\cosh(x - \beta) + \cos(f(x) - h_2)} d\beta\end{aligned}$$

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

$$\varpi_2(x) = \mathcal{K} \left(\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial_x f(\beta) \sin(h_2 + f(\beta))}{\cosh(x - \beta) - \cos(h_2 + f(\beta))} d\beta \right. \\ \left. \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial_x f(\beta) \sin(-h_2 + f(\beta))}{\cosh(x - \beta) + \cos(-h_2 + f(\beta))} d\beta \right)$$

$$+ \frac{\mathcal{K}^2}{\sqrt{2\pi}} G_{h_2, \mathcal{K}} * \left(\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial_x f(\beta) \sin(h_2 + f(\beta))}{\cosh(x - \beta) - \cos(h_2 + f(\beta))} d\beta \right. \\ \left. - \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial_x f(\beta) \sin(-h_2 + f(\beta))}{\cosh(x - \beta) + \cos(-h_2 + f(\beta))} d\beta \right).$$



Definimos

Condición de Rayleigh-Taylor

$$RT(x, t) = -(\nabla p^2(z(x, t)) - \nabla p^1(z(x, t))) \cdot \partial_x^\perp z(x, t).$$

Decimos que estamos en el caso **R-T estable** si $RT > 0$.

Usando la incompresibilidad y la ley de Darcy,

$$RT(x, t) = (\rho^2 - \rho^1) \partial_x z_1(x, t) > 0$$

Para un grafo, esta condición se satisface si el fluido más denso está debajo del más ligero.

Teorema: Bien propuesto en el caso R-T estable

Sea $f_0 \in \mathfrak{A}$ un dato inicial en el caso estable ($\rho^2 - \rho^1 > 0$).

Entonces existe una solución clásica, f , hasta tiempo $T = T(f_0)$.

$\mathfrak{A} \subset H^3$ es el conjunto de datos admisibles, que varían según el problema pero que han de satisfacer no tocar a la curva h ni al borde del dominio. Este enunciado se formula para cada una de las ecuaciones anteriores sin más que cambiar los datos iniciales admisibles.

Escépticos...

¡Espera! Has dicho que el caso homogéneo y con profundidad infinita había sido estudiado por A. Castro, A. Córdoba, D. Córdoba, F. Gancedo y M. López-Fernández. Quizá tus ecuaciones son *perturbaciones* de ese problema...

Vamos a ver unas simulaciones.

Dijimos que estas ecuaciones tienen un **efecto suavizante**. Usando que el término lineal es similar a $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ con el signo correcto si estamos en el caso R-T estable, tenemos

Teorema: Analiticidad instantánea (Caso 2)

Supongamos que se satisface la condición R-T y sea $f_0 \in \mathfrak{A}$ nuestro dato inicial. Entonces la solución a nuestro problema se vuelve analítica para todo tiempo $t > 0$. Es más, es analítica en la banda

$$\mathbb{B} = \{x + i\xi, |\xi| < k(f_0)t\}.$$

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

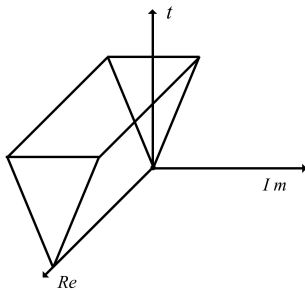


Figure: Banda de analiticidad de f .

Y casi como una consecuencia directa se tiene el siguiente resultado

Teorema: Ill-posedness en el caso R-T inestable (Caso 2)

Existen soluciones $\tilde{f}$ con $\rho^2 < \rho^1$ (R-T inestable) tales que $\|\tilde{f}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} < \epsilon$ y $\|\tilde{f}(\delta)\|_{H^s(\mathbb{R})} = \infty$, para cualquier $4 \leq s$, $0 < \epsilon$ y $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Una vez que hemos probado existencia local, ¿es global?



Figure: Jean-Désiré-Gustave Courbet, La Ola, 1870

Teorema: Singularidades en tiempo finito

Sea $\rho^2 - \rho^1 > 0$ (RT estable). Entonces existen datos iniciales $f_0 \in \mathfrak{A}$ tales que, al menos para un intervalo de $\mathcal{K}$, tienen *blow up* para $\|\partial_x f(t)\|_{L^\infty}$ a tiempo $t = t_1$ y, si $t > t_1$, la curva no puede ser parametrizada como un grafo.

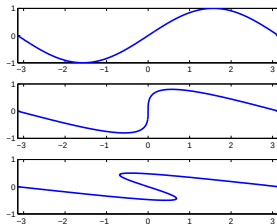


Figure: La evolución en tiempo $t = -t_1, 0, t_1$, respectivamente.

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

¿Y las fronteras? ¿Hacen que en el caso homogéneo y acotado el comportamiento sea diferente del caso con profundidad finita?

Teorema: Efecto del fondo

Existen datos iniciales $z_0(\alpha) = (z_1(\alpha), z_2(\alpha))$ tales que tienen *blow up* sólo si la profundidad es **finita**. Si la profundidad es infinita las mismas curvas se *aplanan*.

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

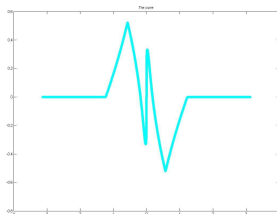


Figure: Un ejemplo de tales curvas

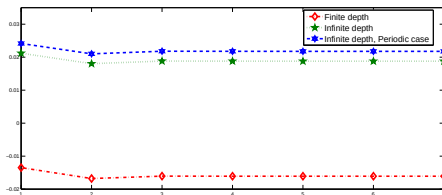


Figure: $\partial_x v_1(0)$ en los distintos casos.

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Queremos ahora saber algo sobre el comportamiento de las soluciones

Teorema: Principio del máximo para $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ (Caso 2)

Sea f la solución del problema 2 en el caso R-T estable. Entonces f satisface que

$$\|f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Teorema: Estimación del decaimiento

Sea $f_0 \geq 0$, $f_0 \in L^1 \cap \mathcal{A}$. Entonces se satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{d}{dt} \|f(t)\|_{L^\infty} \leq -c(\|f_0\|_{L^1}, \|f_0\|_{L^\infty}, \rho^2, \rho^1, l) e^{-\frac{\pi \|f_0\|_{L^1}}{l \|f(t)\|_{L^\infty}}}.$$

Notamos la dependencia en la profundidad, l .

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Queremos ahora saber algo sobre el comportamiento de las soluciones

Teorema: Principio del máximo para $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ (Caso 2)

Sea f la solución del problema 2 en el caso R-T estable. Entonces f satisface que

$$\|f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Teorema: Estimación del decaimiento

Sea $f_0 \geq 0$, $f_0 \in L^1 \cap \mathfrak{A}$. Entonces se satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{d}{dt} \|f(t)\|_{L^\infty} \leq -c(\|f_0\|_{L^1}, \|f_0\|_{L^\infty}, \rho^2, \rho^1, l) e^{-\frac{\pi \|f_0\|_{L^1}}{l \|f(t)\|_{L^\infty}}}.$$

Notamos la dependencia en la profundidad, l .

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Eso es menos decaimiento del que se puede probar si la profundidad es infinita. ¿Qué pasaba en nuestras simulaciones?

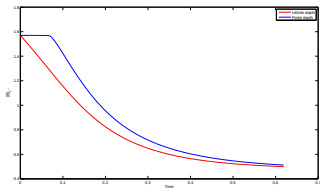


Figure: Dato inicial 1.

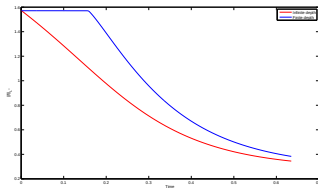


Figure: Dato inicial 2.

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Esos eran datos iniciales pares y muy cercanos a la frontera. ¿Qué pasa para un dato inicial más lejano y sin tanta simetría?

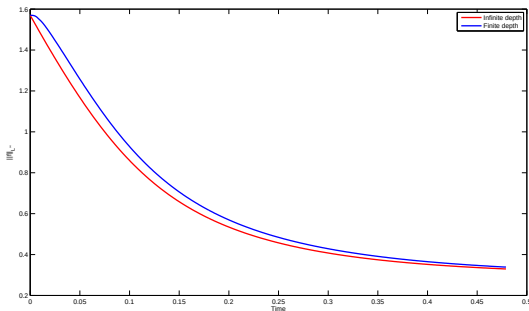


Figure: Dato inicial 3.

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

¿Podremos evitar esas singularidades de las que hablamos hace un momento al menos para algunos datos iniciales?

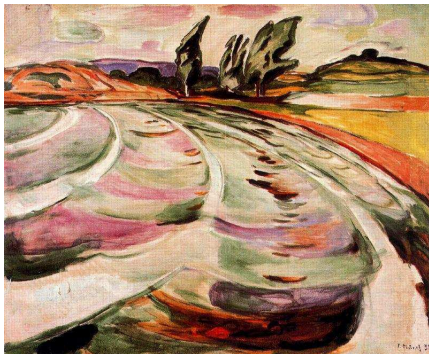


Figure: La ola, Edvard Munch, 1921

Datos con:

1. Amplitud pequeña
2. Pendiente pequeña

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Precisemos lo que queremos decir

Primera hipótesis

$$\|\partial_x f_0\|_{L^\infty} \leq 1, \quad (2)$$

Segunda hipótesis

$$\tan \left(\frac{\pi \|f_0\|_{L^\infty}}{2l} \right) \leq \|\partial_x f_0\|_{L^\infty} \tanh \left(\frac{\pi}{4l} \right), \quad (3)$$

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

Precisemos lo que queremos decir

Primera hipótesis

$$\|\partial_x f_0\|_{L^\infty} \leq 1, \quad (2)$$

Segunda hipótesis

$$\tan\left(\frac{\pi\|f_0\|_{L^\infty}}{2l}\right) \leq \|\partial_x f_0\|_{L^\infty} \tanh\left(\frac{\pi}{4l}\right), \quad (3)$$

Tercera hipótesis

$$\begin{aligned} & \left(\|\partial_x f_0\|_{L^\infty} + |2(\cos(\frac{\pi}{2l}) - 2) \sec^4(\frac{\pi}{4l})| \|\partial_x f_0\|_{L^\infty}^3 \right) \frac{\pi^3}{8l^3} \\ & \times \frac{\left(1 + \|\partial_x f_0\|_{L^\infty} \left(\|\partial_x f_0\|_{L^\infty} + \frac{\tan(\frac{\pi}{2l} \frac{\|\partial_x f_0\|_{L^\infty}}{2})}{\tanh(\frac{\pi}{4l})} \right) \right) \pi^2}{6 \tanh(\frac{\pi}{4l}) 4l^2} \\ & + 4 \tan\left(\frac{\pi}{2l} \|f_0\|_{L^\infty}\right) - 4 \|\partial_x f_0\|_{L^\infty} \cos\left(\frac{\pi}{l} \|f_0\|_{L^\infty}\right) \leq 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Estas hipótesis se satisfacen si la amplitud y la pendiente son pequeñas.

Teorema: Principio del máximo para $\|\partial_x f\|_{L^\infty}$

Sea $f_0 \in \mathfrak{A}$ un dato inicial tal que las condiciones anteriores (2),(3) y (4) se cumplen. Entonces,

$$\|\partial_x f(t)\|_{L^\infty} \leq \|\partial_x f_0\|_{L^\infty}.$$

Es más, existe $(x(l), y(l))$ tal que si $\|\partial_x f_0\|_{L^\infty} < y(l)$ y $\|f_0\|_{L^\infty} < x(l)$ se tiene que

$$\|\partial_x f\|_{L^\infty} \leq 1.$$

Problemas de frontera "no-tan-libre"

Rafael Granero-Belinchón

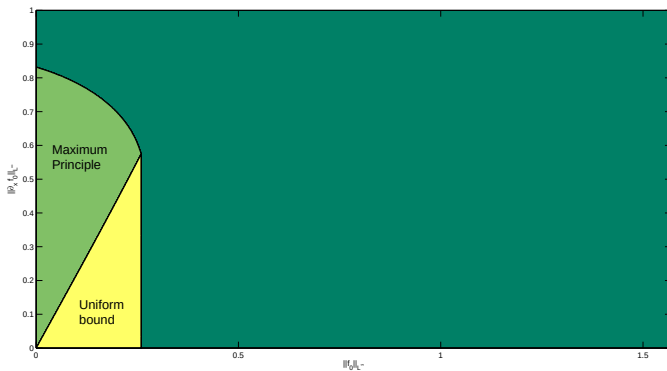


Figure: Regiones.

También se puede probar lo siguiente

Teorema: Principio del máximo para $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ (Caso 2)

Sea f la solución del problema 2 en el caso R-T estable. Entonces f satisface que

$$\|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{2}{\rho^2 - \rho^1} \int_0^t \|v(s)\|_{L^2(S)}^2 ds = \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$